105 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

105 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

（**1**）因為由圓外一點作圓的兩切線，切線段長會相等，所以$\overline{BD}=\overline{BF}=x$，推得$\overline{CD}=\overline{BC}-\overline{BD}=4-x$；又因為$\overline{CE}=\overline{CD}$，所以$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=9-x$。而且$\overline{AF}=\overline{AE}$，也就是 $6+x=9-x$，可以解得 $x=\dfrac{3}{2}$。

另一種解法是由$\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BF}=6+x$，$\overline{CD}=\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}=1+x$，推得$\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{CD}=4-(1+x)=3-x$，再利用$\overline{BD}=\overline{BF}$，解出$x=\dfrac{3}{2}$。

（**2**）**【解法一】**

由第(1)小題知道$\overline{BD}=\dfrac{3}{2}$及$\overline{CD}=\dfrac{5}{2}$，因此可得$\overline{BD}:\overline{CD}=3:5$。所以由分點公式可以得到 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{3+5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{3+5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$，也就是$\alpha=\dfrac{5}{8}$、$\beta=\dfrac{3}{8}$。

【解法二】

由於$\overline{BD}=\dfrac{3}{2}$、$\overline{CD}=\dfrac{5}{2}$，得知$\overrightarrow{BD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{DC}$。因此

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})，$$

所以$\overrightarrow{AD}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，得到$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$，也就是$\alpha=\dfrac{5}{8}$、$\beta=\dfrac{3}{8}$。

第二題

（**1**）由題意在$0\le x\le 3$的範圍中，$f(x)$在$x=0$與$x=2$有最大值12，因爲$x=2$不是邊界點，所以$f(x)$在$x=2$有相對極大值12，加上$f(0)=f(2)$，故可得三次函數圖形如圖所示。此時$a<0$。

（**2**）【**解法一**】

方程式$f(x)-12=0$的實數解x可視爲直線$y=12$與$y=f(x)$的交點x坐標，由$f(0)=12, f(2)=12$可得$x=0, x=2$是$f(x)-12=0$的兩個解，因爲$f(x)$在$x=2$有相對極大值，所以$x=2$是一個二重根。從而$f(x)-12=ax(x-2)^2$。由於$G'(x)=f(x)$，又因爲$G(x)$在$x=1$處有相對極值，故可得$f(1)=G'(1)=0$。所以由$f(1)-12=a$得知$a=-12$，且$f(x)=-12x(x-2)^2+12$。

【解法二】

由 $f(0)=f(2)=12, f'(2)=0$，可知 $f(x)-12=0$ 的解是 0 和 2（重根）。

由 $G'(x)=f(x)$，又因爲 $G(x)$ 在 $x=1$ 處有相對極值，故可得 $f(1)=G'(1)=0$。

假設多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，則其微分是 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$。

再由 $f(0)=f(2)=12, f'(2)=0$，解得 $c=4a$、$b=-4a$、$d=12$，後續由 $f(1)=0$ 可解得 $a=-12$。亦即 $f(x)=-12x^3+48x^2-48x+12$。

（**3**）因爲 $G'(x)=f(x)=-12x(x-2)^2+12=-12(x-1)(x^2-3x+1)$，分解因式得到 $G'(x)=f(x)=-12(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})(x-1)(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})$，所以 $G'(x)=f(x)=0$ 發生於 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x=1$。因此在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值可能在 $x=0,\frac{3-\sqrt{5}}{2},1,2$。

以下提供兩個解法說明 $G(x)$ 之最小值爲 $G(0)=0$。

【解法一】

由於 $0\le x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 以及 $1<x\le 2$ 時 $G'(x)>0$，得知 $G(x)$ 在此兩個區間範圍內都是遞增函數，所以 $G(0)<G(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$，$G(1)<G(2)$。因此在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值可能是 $G(0)$ 或 $G(1)$。由於

$$G(1)-G(0)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(-12t^3+48t^2-48t+12)dt=(-3t^4+16t^3-24t^2+12t)\Big|_0^1=1$$

，所以在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值爲 $G(0)=0$。

【解法二】

由第(2)小題 $f(x)=-12x^3+48x^2-48x+12$，可推得

$G(x)=-3x^4+16x^3-24x^2+12x$

因為 $G(x)$ 之最小值可能在 $x=0,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},1,2$，代入這四個 x 之值得到

$G(0)=0,G(1)=1,G(2)=8$ 以及 $G(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})=5(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})$，比較這四個函數值，得知在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值為 $G(0)=0$。

或由 $G''(x)=f'(x)=-36x^2+96x-48=-12(x-2)(3x-2)$，且 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<\dfrac{2}{3}<1$，推得 $G''(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})<0,G''(1)>0$，故 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 為相對極大值，由 $G(0)=0,G(1)=1,G(2)=8$ 得知在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，$G(x)$ 之最小值為 $G(0)=0$。