105年公務人員特種考試關務人員考試、105年公務人員特種考試身心障礙人員考試及105年國軍上校以上軍官轉任公務人員考試試題

考 試 別：身心障礙人員考試
等　　別：三等考試
類　　科：電力工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：________________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉普拉斯轉換（Laplace transform）解微分方程式：

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}, y(0) = 3, y'(0) = -3, y''(0) = -47$，其中

$y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$。（10分）

二、令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 6 \\ -9 & -8 & 12 \\ -12 & -12 & 16 \end{bmatrix}$

㈠求矩陣 $\mathbf{X}$ 使得 $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ 成為一對角矩陣（diagonal matrix）。（7分）

㈡求 $\mathbf{A}^{50}$。（8分）

三、令向量函數 $\mathbf{F} = [-y, x, z^2]$，曲線 C 為螺旋圓弧線 $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, t]$ 從 $(2, 0, 0)$ 到 $(-2, 0, \pi)$，試求下列線積分（line integral）。

㈠ $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}$（5分）

㈡ $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})dt$（5分）

四、已知 $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$，$|z| < 1$。請針對以下各範圍，以 $z = i$ 為中心，將一個複數函數 $f(z) = \dfrac{5z + i2}{z(z+i)}$ 做級數展開（series expansion）：

㈠ $|z - i| < 1$（8分）

㈡ $2 < |z - i| < \infty$（7分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　代號：4309

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 若向量 $F = i + j + k,\ G = i - j - k$，則下列向量何者與 F, G 線性相依（linearly dependent）？

(A) i　(B) j　(C) k　(D) $i + j - k$

2 在二維平面上，點（7, -4）到直線 $-4x + 3y - 10 = 0$ 的距離為何？

(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 50

3 下列參數式（parameter representation）[x, y, z]中，何者代表橢圓？

(A) $[1, 2\cos t, -\sin t]$　(B) $[-\sin t, \cos 2t, 1]$　(C) $[2\cos t, -\sin t, t]$　(D) $[-\sin t, t, \cos 2t]$

4 二函數分別為 $f = x + y - z$ 及 $g = xyz$，試求 $\nabla \cdot (\nabla(fg))$：

(A) $2(yz + xz - xy)$　(B) $2(yz + xz + xy)$　(C) $yz + xz - xy$　(D) $yz + xz + xy$

5 下列何者為正交矩陣（orthogonal matrix）？

(A) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 19 & 13 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 2-3i & 3+4i \\ 1-5i & i \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

6 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，矩陣 B 滿足 $AB = BA$，則矩陣 B 可為何？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，有關其特徵值 λ 及特徵向量（eigenvectors）$\mathbf{x}$ 何者錯誤？

(A) $\lambda = 5$　(B) $\lambda = 3$　(C) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　(D) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8 令矩陣 $\boldsymbol{A}$ 為一 66×18 之矩陣且其秩（rank）為 13，若有 m 個線性獨立（linearly independent）向量滿足 $\boldsymbol{Ax}=0$，另若有 n 個線性獨立（linearly independent）向量滿足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=0$，其中右上標 T 表示轉置（transpose），則 $m+n$ 最大值為何？

(A)13 (B)26 (C)58 (D)66

9 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數（complex series），若 $z_n \neq 0$ 且已知 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$，則下列敘述何者錯誤？

(A)若 $L<1$，則此級數收斂
(B)若 $L<1$，則此級數絕對收斂(absolutely convergent)
(C)若 $L>1$，則此級數發散
(D)若 $L=1$ 且 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$，則此級數收斂

10 假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z-2i|=2$，試求積分 $\int_C \frac{\exp(z)}{(z^2+\pi^2)}dz$ 為何？

(A)0 (B)i (C)$-i$ (D)-1

11 $\sqrt{17}e^{i(\pi-\tan^{-1}(4))}$ 化簡後可得：

(A)$1+4i$ (B)$1-4i$ (C)$-1+4i$ (D)$-1-4i$

12 $y''-xy'+2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

以級數法解得 $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，則 $\sum_{n=0}^{2} a_n =$ ？

(A)0 (B)-1 (C)2 (D)1

13 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ 滿足下列那種性質？其中 c 為實常數：

(A)拋物線型 (B)橢圓型 (C)熱傳導方程式 (D)波動方程式

14 已知 $F(s)=\frac{3s-4}{s^2+5s+4}$，求其所對應之反拉氏轉換（Inverse Laplace Transform）函數 $f(t)$：

(A)$\frac{7}{3}e^{-4t}+\frac{16}{3}e^{-t}$ (B)$-\frac{7}{3}e^{-t}+\frac{16}{3}e^{-4t}$ (C)$\frac{7}{3}e^{-t}-\frac{16}{3}e^{-4t}$ (D)$-\frac{7}{3}e^{-4t}+\frac{16}{3}e^{-t}$

15 一函數 $f(x)=e^{-3x}, x>0$，下列何者正確？

(A) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{9+w^2}\,dw$　(B) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin wx}{9+w^2}\,dw$

(C) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\cos wx}{9+w^2}\,dw$　(D) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{9+w^2}\,dw$

16 以級數 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 求解 $y''+x^2y'+4y=1+x^2$，則其所得到的遞迴關係式（Recurrence relation）為何？

(A) $(n+1)a_{n+2}+(n+2)(n+1)a_{n+1}+4a_n=0$ for $n=2, 3,\cdots\cdots$

(B) $(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_{n+1}+4a_n=0$ for $n=2, 3,\cdots\cdots$

(C) $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}+4a_n=0$ for $n=2, 3,\cdots\cdots$

(D) $(n+2)(n+1)a_{n+2}+4a_n+(n-1)a_{n-1}=0$ for $n=2, 3,\cdots\cdots$

17 下列何者為偶函數？

(A) $f(x)=x\cos x$　(B) $f(x)=\sqrt{2x^2+6}$　(C) $f(x)=x^5-5x^3$　(D) $f(x)=\sin x$

18 自 $\{(x, y): x^2+y^2\le 1\}$ 中均勻且隨機(uniformly and randomly)挑出點 (x, y)，令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，試求當 $0<r<1$ 時之累積分佈函數（cumulative distribution function）為何？

(A) r^4　(B) r^3　(C) r^2　(D) r

19 一射手射擊一目標 4 次，每次射擊皆為獨立事件且命中之機率皆為 0.7，試求該射手非全部命中亦非全部不命中之機率為何？

(A) $\frac{2401}{10000}$　(B) $\frac{2439}{5000}$　(C) $\frac{3759}{5000}$　(D) $\frac{8543}{10000}$

20 給定一個離散隨機變數（discrete random variable）X，它的機率質量函數（probability mass function）為 $p(x)=\begin{cases} K\left(\frac{2}{3}\right)^x, x=1,2,3,\cdots \\ 0, \quad otherwise \end{cases}$。則 K 之值為何？

(A) 1/2　(B) 2/3　(C) 3/4　(D) 2