

大學入學考試中心

100 學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上畫記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液(帶)。

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\overset{3}{\square}$ 畫記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 畫記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 個選項，其中只有一個是最適當的答案，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 有一箱子，內有 3 黑球與 2 白球。有一遊戲，從箱子中任取出一球。假設每一顆球被取出的機率都相同，若取出黑球可得獎金 50 元，而取出白球可得獎金 100 元，則下列哪一個選項是此遊戲的獎金期望值？
 - (1) 70 元
 - (2) 75 元
 - (3) 80 元
 - (4) 85 元
 - (5) 90 元

2. 多項式 $4(x^2+1)+(x+1)^2(x-3)+(x-1)^3$ 等於下列哪一個選項？
 - (1) $x(x+1)^2$
 - (2) $2x(x-1)^2$
 - (3) $x(x-1)(x+1)$
 - (4) $2(x-1)^2(x+1)$
 - (5) $2x(x-1)(x+1)$

3. 設 $(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$ ， n 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n = \log a_n$ ，則數列 b_1, b_2, b_3, \dots 為
 - (1) 公差為正的等差數列
 - (2) 公差為負的等差數列
 - (3) 公比為正的等比數列
 - (4) 公比為負的等比數列
 - (5) 既非等差亦非等比數列

4. 坐標平面上滿足方程式 $(\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2}) = 0$ 的點 (x, y) 所構成的圖形為
 - (1) 只有原點
 - (2) 橢圓及原點
 - (3) 兩條相異直線
 - (4) 橢圓及雙曲線
 - (5) 雙曲線及原點

5. 請問下面哪一個選項是正確的？

- (1) $3^7 < 7^3$
- (2) $5^{10} < 10^5$
- (3) $2^{100} < 10^{30}$
- (4) $\log_2 3 = 1.5$
- (5) $\log_2 11 < 3.5$

6. 根據台灣壽險業的資料，男性從 0 歲、1 歲、...到 60 歲各年齡層的死亡率(單位：%)依序為

1.0250, 0.2350, 0.1520, 0.1010, 0.0720, 0.0590, 0.0550, 0.0540, 0.0540, 0.0520, 0.0490, 0.0470, 0.0490, 0.0560, 0.0759, 0.1029, 0.1394, 0.1890, 0.2034, 0.2123, 0.2164, 0.2166, 0.2137, 0.2085, 0.2019, 0.1948, 0.1882, 0.1830, 0.1799, 0.1793, 0.1813, 0.1862, 0.1941, 0.2051, 0.2190, 0.2354, 0.2539, 0.2742, 0.2961, 0.3202, 0.3472, 0.3779, 0.4129, 0.4527, 0.4962, 0.5420, 0.5886, 0.6346, 0.6791, 0.7239, 0.7711, 0.8229, 0.8817, 0.9493, 1.0268, 1.1148, 1.2139, 1.3250, 1.4485, 1.5851, 1.7353。

經初步整理後，已知 61 個資料中共有 24 個資料小於 0.2。請問死亡率資料的中位數為下列哪一個選項？

- (1) 0.2034
- (2) 0.2164
- (3) 0.2137
- (4) 0.2085
- (5) 0.2019

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7. 設 O 、 A 、 B 分別為複數平面上代表 0 、 $1+i$ 、以及 $1-i$ 的點。請問下列哪些選項所對應的點落在 $\triangle OAB$ 的內部？

- (1) $\cos 60^\circ$
- (2) $\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$
- (3) $\frac{4-3i}{5}$
- (4) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
- (5) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{25}$

8. 已知 $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ 且 $\cos \theta > 0$ ，請問下列哪些選項是正確的？
- (1) $\tan \theta < 0$
 - (2) $\tan^2 \theta > \frac{4}{9}$
 - (3) $\sin^2 \theta > \cos^2 \theta$
 - (4) $\sin 2\theta > 0$
 - (5) 標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限
9. 考慮坐標平面上以 $O(0,0)$ 、 $A(3,0)$ 、 $B(0,4)$ 為頂點的三角形，令 C_1 、 C_2 分別為 $\triangle OAB$ 的外接圓、內切圓。請問下列哪些選項是正確的？
- (1) C_1 的半徑為 2
 - (2) C_1 的圓心在直線 $y=x$ 上
 - (3) C_1 的圓心在直線 $4x+3y=12$ 上
 - (4) C_2 的圓心在直線 $y=x$ 上
 - (5) C_2 的圓心在直線 $4x+3y=6$ 上
10. 坐標平面中，向量 \vec{w} 與向量 $\vec{v} = (2, \sqrt{5})$ 互相垂直且等長。請問下列哪些選項是正確的？
- (1) 向量 \vec{w} 必為 $(\sqrt{5}, -2)$ 或 $(-\sqrt{5}, 2)$
 - (2) 向量 $\vec{v} + \vec{w}$ 與 $\vec{v} - \vec{w}$ 等長
 - (3) 向量 $\vec{v} + \vec{w}$ 與 \vec{w} 的夾角可能為 135°
 - (4) 若向量 $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ ，其中 a, b 為實數，則向量 \vec{u} 的長度為 $\sqrt{a^2 + b^2}$
 - (5) 若向量 $(1, 0) = c\vec{v} + d\vec{w}$ ，其中 c, d 為實數，則 $c > 0$
11. 在坐標平面上，圓 C 的圓心在原點且半徑為 2，已知直線 L 與圓 C 相交，請問 L 與下列哪些圖形一定相交？
- (1) x 軸
 - (2) $y = (\frac{1}{2})^x$
 - (3) $x^2 + y^2 = 3$
 - (4) $(x-2)^2 + y^2 = 16$
 - (5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

12. 坐標空間中，考慮球面 $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$ 與 $A(1,0,0)$ 、 $B(-1,0,0)$ 兩點。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 原點在球面 S 上
- (2) A 點在球面 S 之外部
- (3) 線段 \overline{AB} 與球面 S 相交
- (4) A 點為直線 AB 上距離球心最近的點
- (5) 球面 S 和 xy, yz, xz 平面分別截出的三個圓中，以與 xy 平面所截的圓面積為最大

13. 設 $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ，請問下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$
- (2) $f(x) = 2$ 有整數解
- (3) $f(x) = x^2 + 1$ 有實數解
- (4) $f(x) = x$ 有不等於零的有理數解
- (5) 若 $f(a) = 2$ ，則 $f(-a) = 2$

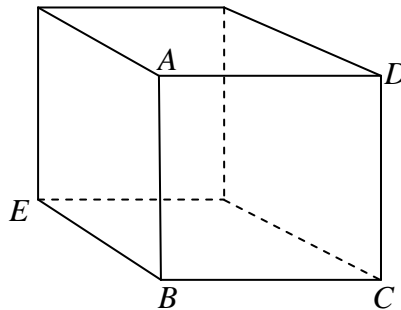
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (14-35)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知首項為 a 、公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a 、公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a 、公比為 $2r$ 的無窮等比級數和等於 $\frac{\textcircled{14}\textcircled{15}}{\textcircled{16}}$ 。

B. 空間中一長方體如下圖所示，其中 $ABCD$ 為正方形， \overline{BE} 為長方體的一邊。已知

$$\cot \angle AEB = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \text{ 則 } \cot \angle CED = \frac{\textcircled{17}}{\textcircled{18}}。$$



C. 高三甲班共有 20 位男生、15 位女生，需推派 3 位同學參加某項全校性活動。班會中大家決定用抽籤的方式決定參加人選。若每個人中籤的機率相等，則推派的三位同學中有

$$\text{男也有女的機率為 } \frac{\textcircled{19}\textcircled{20}}{\textcircled{21}\textcircled{22}\textcircled{23}}。$$

D. 四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 1, \overline{BC} = 5, \overline{CD} = 5, \overline{DA} = 7$ ，且 $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ，則對角線 \overline{AC} 長為 $\sqrt{\textcircled{24}\textcircled{25}}$ 。

- E. 一礦物內含 A 、 B 、 C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A 、 B 、 C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A 、 B 、 C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A 、 B 、 C 物質之質量分別為 26、27、28 公克。

- F. 設 $E_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > 0$) 為焦點在 $(3, 0), (-3, 0)$ 的橢圓；
 E_2 : 焦點在 $(3, 0)$ 且準線為 $x = -3$ 的拋物線。
已知 E_1, E_2 的交點在直線 $x = 3$ 上，則 $a = \underline{29 + 30\sqrt{31}}$ 。

- G. $H : x - y + z = 2$ 為坐標空間中一平面， L 為平面 H 上的一直線。已知點 $P(2, 1, 1)$ 為 L 上距離原點 O 最近的點，則 $(2, \underline{32}, \underline{33}), \underline{34}, \underline{35})$ 為 L 的方向向量。

參考公式及可能用到的數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ， $r \neq 1$
- 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$
 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
 $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 棣美弗定理：設 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， n 為一正整數
- 算術平均數： $M(=\bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
(樣本)標準差： $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{X}^2)}$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ； $\sqrt{3} \approx 1.732$ ； $\sqrt{5} \approx 2.236$ ； $\sqrt{6} \approx 2.449$ ； $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$